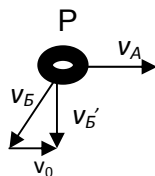


РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА ЗА ПРВИ РАЗРЕД

1.

$$\begin{aligned} v_A &= v_B = \eta v_0 ; \\ \eta &= 1.2 ; \\ \tau_A / \tau_B &= ? \end{aligned}$$



Ако са s означимо дужину пута коју чамац А пређе низводно као и пут који чамац Б пређе нормално на ток ријеке, а брзину ријеке са v_0 , имамо:

А:- низводно

$$s = (v_0 + v_A) t_{1A} = (v_0 + \eta v_0) t_{1A} \quad (2) \quad t_{1A} = s / v_0 (\eta + 1) \quad (1)$$

узводно

$$s = (v_A - v_0) t_{2A} = (\eta v_0 - v_0) t_{2A} \quad (2) \quad t_{2A} = s / v_0 (\eta - 1) \quad (1)$$

Укупно вријеме кретања чамца А добијамо као

$$\tau_A = t_{1A} + t_{2A} \quad (1): \quad \tau_A = s / v_0 (\eta + 1) + s / v_0 (\eta - 1) : \tau_A = 2s\eta / v_0 (\eta^2 - 1) \quad (1)$$

Б: - да би се чамац Б кретао нормално на ток ријеке, он се мора кретати под неким углом α , па из слагања брзина имамо: (са слике): $v_B^2 = v_0^2 + v_B'^2$ (1)

Вријеме за које чамац оде од плутаче до заустављања, једнако је времену повратка чамца, с тим да се чамац у оба смјера креће истом брзином:

$$s = (v_B^2 - v_0^2)^{1/2} t_{1B} \quad (1) \quad s = (v_B^2 - v_0^2)^{1/2} t_{2B} \quad (1)$$

$$t_{1B} = s / (v_B^2 - v_0^2)^{1/2} \quad (1) \quad t_{2B} = s / (v_B^2 - v_0^2)^{1/2} \quad (1)$$

Укупно вријеме кретања чамца Б добијамо као: $\tau_B = t_{1B} + t_{2B}$ (1)

$$\tau_B = 2s / (v_B^2 - v_0^2)^{1/2} = 2s / (\eta^2 v_0^2 - v_0^2)^{1/2} = 2s / v_0 (\eta^2 - 1)^{1/2} \quad (2)$$

На крају имамо:

$$\tau_A / \tau_B = \{2s\eta / v_0 (\eta^2 - 1)\} / \{2s / v_0 (\eta^2 - 1)^{1/2}\} \quad (2): \quad \tau_A / \tau_B = \eta / (\eta^2 - 1)^{1/2} \quad (1)$$

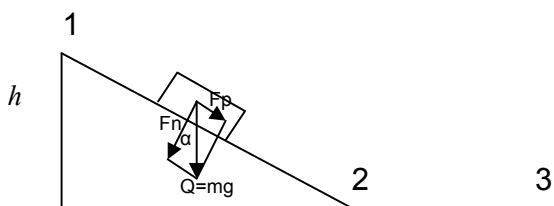
$$\tau_A / \tau_B = 1.2 / ((1.2)^2 - 1)^{1/2} : \quad \tau_A / \tau_B = 1.8 \quad (1) \quad (20)$$

2. $m = 50 \text{ g}$

$\alpha = 30^\circ$

$k = 0.15$

$l = 50 \text{ cm}$



Укупан рад силе трења је једнак раду који је извршен на стрмој равни А₁ и раду који је извршен на хоризонталној подлози А₂. Дужина стрме равни је означена са s , висина са h , а дужина пута на хоризонталној равни са l . $A = A_1 + A_2$ (1) $F_1 = -kF_n$ (1) $F_n = mg \cos \alpha$ (0.5) $F_2 = -kmg$ (1)

$$A_1 = F_1 s = -kmg s \cos \alpha \quad (0.5) \quad A_2 = F_2 l = -kmg l \quad (0.5)$$

$$\text{Укупан рад:} \quad A = -kmg s \cos \alpha - kmg l \quad (1) \quad A = -kmg (s \cos \alpha + l) \quad (1)$$

Укупни рад је једнак промјени енергије, па имамо: $A = E_3 - E_1$ (1)

$$1: E_p = mgh \quad E_k = 0 \quad (1) \quad 3: E_p = 0 \quad E_k = 0 \quad (1)$$

$$\text{Одавде слиједи:} \quad 0 - E_p = A \quad (1) \quad A = -mgh \quad (1)$$

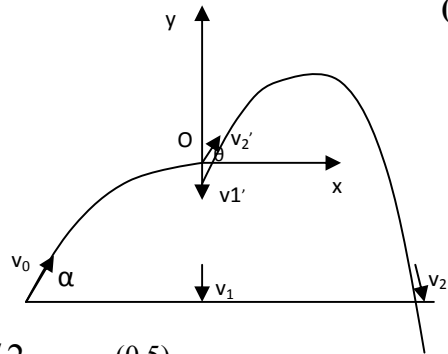
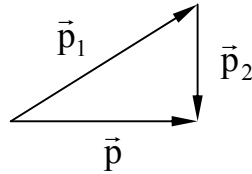
$$\text{Са слике уочавамо:} \quad \sin \alpha = h / s \quad (0.5)$$

$$\text{одакле је:} \quad h = s \sin \alpha \quad (0.5)$$

С обзиром да је дужина стрме равни непозната, из задње једначине уврстимо x у једначину за рад коју смо добили расписивањем закона одржања енергије, те одатле изразимо дужину равни коју ћемо уврстити за коначни израз за рад силе трења

$$\begin{aligned}
 A &= -mgh = -mg s \sin \alpha & (1) & \quad s = -A / mg \sin \alpha & (1) & \quad A = -kmg(-A / mg \sin \alpha) \cos \alpha - kmg l & (1) \\
 A &= k \operatorname{Actg} \alpha - kmg l & (0.5) & \quad kmg l = A(k \operatorname{ctg} \alpha - 1) & (0.5) & \quad A = kmg l / (k \operatorname{ctg} \alpha - 1) & (0.5) \\
 A &= 0.15 * 0.05 \text{ kg} * 9.81 \text{ m/s}^2 * 0.05 \text{ m} / (0.15 * \operatorname{ctg} 30^\circ - 1) & (1) & \quad A = 0.05 \text{ J} & (2) & & (20)
 \end{aligned}$$

3. $v_0 = 100 \text{ m/s}$
 $\alpha = 45^\circ$
 $v_1 = 97 \text{ m/s}$
 $v_2 = ?$



Са слике видимо да је : $v = v_0 \cos \alpha$ (0.5)
 Примјенивши закон одржања импулса имамо (у тачки O):

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (0.5) \quad m\vec{v} = m\vec{v}'_1 / 2 + m\vec{v}'_2 / 2 \quad (0.5)$$

пошто нам и на лијевој и на десној страни фигурише маса, може се скратити, па слиједи:

$$\vec{v} = \vec{v}'_1 / 2 + \vec{v}'_2 / 2. \quad (1)$$

У тачки O можемо поставити координатни систем и расписати компоненте брзине:

$$x: v = 0 + (v'_2 / 2) \cos \theta \quad (1) \quad y: 0 = -v'_1 / 2 + (v'_2 / 2) \sin \theta \quad (1)$$

Из ове двије једначине се може изразити v'_2 компонента брзине преко v и v'_1 , тако што једначину x : квадрирамо, а из једначине y : изразимо $\sin \theta$.

$$v^2 = (1/4 v'^2_2) \cos^2 \theta \quad (0.5) \quad \sin \theta = v'_1 / v'_2 \quad (0.5)$$

Косинус у првој једначини изразимо преко синуса по формули,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad (0.5) \quad \text{те извршимо замјену:}$$

$$v^2 = (1/4 v'^2_2)(1 - \sin^2 \theta) \quad (0.5): \quad v^2 = (1/4 v'^2_2)(1 - v'^2_1 / v'^2_2) \quad (0.5): \quad v^2 = 1/4 v'^2_2 - 1/4 v'^2_1 \quad (1)$$

$$\text{Одавде се добије } v'^2_2 : v'^2_2 = 4v^2 + v'^2_1 \quad * \quad (1)$$

Расписивањем закона одржања енергије у тачки O се добија

$$(1/2)(m/2) v'^2_1 + (m/2)gH = (1/2)(m/2) v_1^2 \quad (1) \quad (1/2)(m/2) v'^2_2 + (m/2)gH = (1/2)(m/2) v_2^2 \quad (1)$$

Скративши обе једначине са $m/2$

$$(1/2) v'^2_1 + gH = (1/2) v_1^2 \quad (0.5) : \quad (1/2) v'^2_2 + gH = (1/2) v_2^2 \quad (0.5)$$

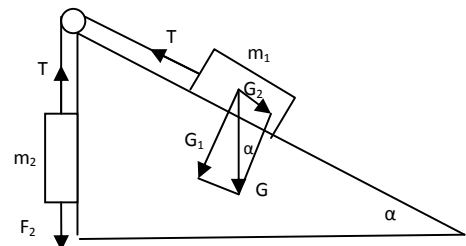
$$\text{и множећи са 2 добија се: } v'^2_1 + 2gH = v_1^2 \quad (1) \quad v'^2_2 + 2gH = v_2^2 \quad (1)$$

Тражену v_2 брзину можемо добити из задње једначине изражену преко познатих величина, тако што ћемо v'_2 изразити из једначине *: $v_2^2 = v'^2_2 + 2gH = 4v^2 + v'^2_1 + 2gH \quad (1): \quad v_2^2 = 4v^2 + 2gH + v_1^2 - 2gH \quad (1)$

$$v_2^2 = 4v^2 + v_1^2 \quad (1) \quad v_2 = (4v^2 + v_1^2)^{1/2} \quad (1) \quad v_2 = (4 * (v_0 \cos \alpha)^2 + v_1^2)^{1/2} \quad (1)$$

$$v_2 = 171 \text{ m/s} \quad (1) \quad (20)$$

4. $\alpha = 30^\circ$
 $m_2 / m_1 = \gamma = 2/3$
 $k = 0.10$



$$m_2/m_1 = \gamma = 2/3: \quad m_2 = \gamma m_1 \quad (0.5)$$

Ако претпоставимо да ће се систем кретати у смјеру дјеловања силе F_2 имамо следећи систем једначина:

$$m_2 a = F_2 - T \quad (2) \quad m_1 a = T - F_{tr} - G_2 \quad (2)$$

$$\text{Рјешавањем овог система једначина по } a \text{ имамо: } a(m_1 + m_2) = F_2 - T + T - F_{tr} - G_2 \quad (1)$$

$$\text{За силу трења имамо: } F_{tr} = -kG_1 \quad (1)$$

$$\text{Са слике се види: } G_1 = G \cos \alpha = m_1 g \cos \alpha \quad (1) \quad \text{одатле:}$$

$$a(m_1 + m_2) = m_2 g - m_1 k g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha \quad (1) \quad a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1 k \cos \alpha - m_1 \sin \alpha) \quad (1)$$

$$a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1(k \cos \alpha + \sin \alpha)) \quad (1) \quad \text{Одавде можемо изразити само } a:$$

$$a = g(m_2 - m_1(k \cos \alpha + \sin \alpha)) / (m_1 + m_2) \quad (2)$$

Сада масу m_2 можемо изразити преко масе m_1 :

$$a = g(\gamma m_1 - m_1(k \cos \alpha + \sin \alpha)) / (m_1 + \gamma m_1) \quad (1)$$

Маса m_1 нам фигурише и у бројнику и у називнику па је можемо пократити:

$$a = g m_1 (\gamma - (k \cos \alpha + \sin \alpha)) / (m_1(1 + \gamma)) \quad (1) \quad a = g(\gamma - (k \cos \alpha + \sin \alpha)) / (1 + \gamma) \quad (3)$$

$$a = 0.05g(1) \quad a = 0.05 * 9.81 \text{ m/s}^2 \quad (0.5) \quad a = 0.4905 \text{ m/s}^2 \quad (1) \quad (20)$$

$$5. \quad T = 5s: \quad \rho = \rho_z: \quad r = 1/2 * r_z: \quad l = ?$$

Да бисмо одредили дужину клатна на датој планети, морамо прво да одредимо гравитационо убрзање планете.

$$\text{- На Земљи важи: } mg_z = Gmm_z/r_z^2 \quad (1)$$

одакле g Земље можемо изразити преко масе, односно густине и полупречника Земље:

$$g_z = Gm_z/r_z^2 \quad (1) \quad m = \rho V \quad (1)$$

$$\text{Посто можемо замислити Земљу као сферу, за њену запремину имамо: } V = 4/3 r_z^3 \pi \quad (1)$$

$$\text{Па слиједи: } g_z = G\rho_z(4/3 r_z^3 \pi) / r_z^2 \quad (1) \quad g_z = (4/3)G\rho_z r_z \quad (1)$$

$$\text{На планети важи: } mg_p = Gmm_p/r_p^2 \quad (1) \quad g_p = Gm_p/r_p^2 \quad (1)$$

$$g_p = G\rho_p(4/3 r_p^3 \pi) / r_p^2 \quad (1) \quad g_p = (4/3)G\rho_p r_p \quad (2)$$

Ако подијелимо изразе за гравитационо убрзање планете и Земље, можемо изразити гравитационо убрзање планете преко познатог гравитационог убрзања земље:

$$\frac{g_p}{g_z} = \frac{G\rho \frac{4}{3} r_p^3 \pi}{G\rho_z \frac{4}{3} r_z^3 \pi} \quad (2) \quad \frac{g_p}{g_z} = \frac{\rho r_p}{\rho_z r_z} \quad (1) \quad \frac{g_p}{g_z} = \frac{\rho \frac{1}{2} r_z}{\rho_z r_z} \quad (1) \quad \frac{g_p}{g_z} = \frac{1}{2}$$

$$g_p = \frac{1}{2} g_z \quad (1) \quad g_p = 4.905 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

Из израза за период осциловања математичког клатна, а знајући гравитационо убрзање, можемо

$$\text{добити дужину клатна: } T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{1/2} \quad (1) \quad T = 2\pi \left(\frac{l}{g_p} \right)^{1/2} \quad l = \frac{T^2 g_p}{4\pi^2} \quad (0.5)$$

$$l = \frac{(5s)^2 4.905 \text{ m/s}^2}{4 \cdot (3.14)^2} \quad (0.5) \quad l = 3.1 \text{ m} \quad (1) \quad (20)$$